Representacion de Algebras de Lie Graduadas

Juan Camilo Guzman, Roberto Martinez

juacguzmanmar@unal.edu.co

VII UNIANDES PARTICLE PHYSICS SCHOOL, Bogotá, Colombia
Universidad Nacional de Colombia

Diciembre 5, 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Agenda

Grupo De Lorentz

En el contexto de la teoria cuantica de campos relativista (RQFT) la estructura física fundamental por excelencia es el **Grupo de Lorentz**, siendo necesaria para la correcta construcción de teorias fisicas de altas energias, definido de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{+}^{\uparrow} = \{\Lambda \in \mathbb{M}_{4x4} \mid (\det\{\Lambda\} = 1), \left((\Lambda)^{0}_{\ 0} \geq 1\right)\} \tag{1}$$

En donde en (1) M_{4x4} hace referencia al conjunto de matrices 4x4 con entradas reales. En general, $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$ es un subgrupo llamado Ortocrono-Propio tambien denotado $SO^{+}(1,3)$.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Generadores del Grupo de Lie

Para explorar las propiedades fisicas del grupo ortocrono propio, es necesario definir el tensor de momento angular tal como:

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \tag{2}$$

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + S_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} \tag{3}$$

Donde en (3) S es otro momento angular, llamado momento angular intrinseco o **Espín**. este conmunta con el momento angular L. primero usemos el algebra de lie asociada con los momentos orbitales o L:

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = ig_{\sigma\mu}L_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} \tag{4}$$

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = ig_{\sigma\mu}S_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}S_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} \tag{5}$$

$$[S_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = 0 \tag{6}$$

Una demostración rigurosa de estas álgebras está dada en [1]

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Álgebra de Lie del grupo de Lorentz

Usando las ecuaciones (4), (5) y (6) obtenemos el algebra de Lie del grupo de Lorentz $so(1,3)$ en forma covariante:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = ig_{\sigma\mu}M_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} \tag{7}$$

Apartir de (7) podemos deducir el algebra de las rotaciones y los Boost, tomando la parte espacial de (7) y definiendo:

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M_{jk} \qquad\qquad K_i = M_{0i} \tag{8}$$

Donde en (8), ϵ es el tensor de Levi-Civita totalmemte antisimetrico.

$$[J_i, J_i] = i\epsilon_{ijk}J_k \qquad [K_i, K_i] = -i\epsilon_{ijk}J_k \qquad [J_i, K_i] = i\epsilon_{ijk}K_k \tag{9}$$

En general, estos son generadores de $SU(2)$

Álgebra de Lie del grupo de Lorentz

Dados los generadores J y K podemos crear una nueva algebra apartir de estos definiendo:

$$N_s = J_s + iK_s \qquad N_s^\dagger = J_s + iK_s \tag{10}$$

Estos tienen la siguiente algebra:

$$\left[N_i, N_j^\dagger\right] = 0 \qquad [N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk}N_k \qquad \left[N_i^\dagger, N_j^\dagger\right] = i\epsilon_{ijk}N_k^\dagger \tag{11}$$

Nótese que (11) define dos algebras de lie independientes y $su(2)$ y por lo tanto poder afirmar a nivel local:

$$so(1,3) \cong su(2) \times su(2) \tag{12}$$

Existe una construcción del algebra de lie de $so(1,3)$ equivalente con la combinacion [2]:

$$N_s = \frac{1}{2}(J_s + iK_s) \qquad M_s = \frac{1}{2}(J_s - iK_s) \tag{13}$$

Representaciones Irreducibles del Grupo de Lorentz

En el contexto de la teoria cuantica de campos relativista (**RQFT**) se llama particula a las posibles representaciones unitarias irreducibles en nuestro caso del grupo de **Lorentz**. es decir que bajo la caracterización de las IR usando hechos de la teoria de grupos de Lie, podemos saber que tipo de particulas predice la teoria. Para una

discusion del hecho de particula se puede consultar [3]. por que esta interpretacion esta bajo estados de una particula. Las representaci-

ones Irreducibles del grupo de Lorentz están caracterizadas por los autovalores de los **Operadores de Casimir**. que para el grupo de Lorentz son:

$$[M^2, M_i] = [N^2, N_i] = 0 \qquad M^2 = \sum_i M_i \qquad N^2 = \sum_i N_i \tag{14}$$

Grupo de Poincare

En la discusión del grupo ortocrono-propio no consideramos las traslaciones espacio-temporales, es decir que si consideramos las transformaciones:

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}_{\ \nu} x^{\nu} + a^{\mu} \tag{15}$$

Obtenemos el grupo de Poincare. existe una manera esquematica y rapida de confirmar su estructura algebraica al considerar las transformaciones del grupo con la operación de composición tal como:

$$T(\Lambda_1, a_1) \cdot T(\Lambda_2, a_2) = T(\Lambda_1 \Lambda_2, \Lambda_2 a_1 + a_2) \tag{16}$$

Donde las matrices $\Lambda \in \mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Álgebra de Lie del Grupo de Poincare

Al considerar las traslaciones, es necesario agregar un generador dentro del grupo de Poincare, esto da como resultado la siguiente álgebra de Lie:

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = ig_{\sigma\nu}P_\mu - ig_{\sigma\mu}P_\nu \tag{17}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = ig_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} \tag{18}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{19}$$

Para esta álgebra de Lie hay dos operadores de **Casimir** los cuales estan dados por:

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma} \tag{20}$$

$$P^2 = P_\sigma P^\sigma \qquad W^2 = W_\mu W^\mu \tag{21}$$

Donde el cuadrivector W es el vector de Pauli-Lubansky.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Representaciones del grupo de Poincare

Los autovalores de los operadores de casimir están dados por:

$$P^2 = m^2 \qquad\qquad W^2 = -m^2 S(S+1) \tag{22}$$

Una demostración de este hecho se puede ver en [1]. En general las representaciones del grupo de Poincare estan dadas por el metodo de las representaciones inducidad por el **Little Group** de Wigner.

Teoremas No-Go y álgebras de Lie Graduadas

- Con la descripción de las irreps del grupo de Poincare, ya se tendria todas las posibles particulas que pudiese tener una teoría física, usando unicamente **simetrias geometricas**. esto porque las transformaciones del grupo de Lorentz están en el espacio-tiempo.

- Pero no se ha considerado que estas puedan tener simetrias internas, al introducir el **Espín**, podemos hablar de **simetrias internas** asociadas a las particulas per-se.

- El teorema de **Coleman-Mandula** establece que solo es posible construir una teoria de campos con el grupo de Poincare en producto directo con un grupo de simetrias internas, $U(1)$ del electromagnetismo, $SU(3)$ de la (QCD) etc.
  Para una demostración vease [4]

Teoremas No-Go y álgebras de Lie Graduadas

- Las teorias supersimetricas o **SUSY**, son una excepción al teorema de **Coleman-Mandula**, por que esta basada en una simetria que no es del grupo de Lorentz, ya que esta produce el cambio del caracter espinorial de la particula. tampoco se puede asociar a una simetria interna, por que estas conservan el caracter espinorial de las particulas.

- Otro aspecto de vital importancia radica en el **Principio de Exclusión de Pauli**, la naturaleza distingue entre particulas de espín entero y semientero, por lo tanto las simetrias **fermionicas** y **Bosonicas** deben ser parte de una teoria que describa la naturaleza.

- Para construir una teoria **SUSY**, es necesario generalizar del teorema de Coleman-Mandula, al considerar una **álgebra de Lie Graduada**. esto tiene como nombre el teorema de **Haag–Lopuszański–Sohnius**.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

- Si introducimos un operador Q de manera que no transforme de manera trivial con el espin, tal que:

$$[Q, S] \neq 0 \tag{23}$$

Entonces, implicaria una extension del espacio vectorial que representa el grupo de Poincare, donde se tendrian particulas de diferente caracter espinorial violando el supuesto fundamental del teorema de **Coleman-Mandula**, donde los nuevos operadores Q no entran en un producto directo con el grupo de Poincare y por tanto entonces para construir representaciones supersimetricas es necesario extender el algebra de Lie del grupo de Poincare a una **Álgebra de lie graduada**

Super-Álgebra de Poincare

Apartir de esta definición se puede definir el Super-Álgebra de Poincare tal con $\mathcal{N} = 1$ tal como:

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = ig_{\sigma\nu} P_\mu - ig_{\sigma\mu} P_\nu \tag{24}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = ig_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} \tag{25}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{26}$$

$$\{Q_A, Q_B\} = \{\bar{Q}_{\dot{A}}, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 0 \tag{27}$$

$$[Q_A, P_\mu] = \left[\bar{Q}_{\dot{A}}, P_\mu\right] = 0 \tag{28}$$

$$[M_{\mu\nu}, Q_A] = i(\sigma^{\mu\nu})_A^{\ B} Q_B \tag{29}$$

$$\left[Q_A, \bar{Q}_{\dot{B}}\right] = 2(\sigma^\mu)_{A\dot{B}} P_\mu \tag{30}$$

Donde se tiene la representación de Weyl para las cargas, esta generada por 14 generadores.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Operadores de Casimir

Para una teoria **SUSY** con $\mathcal{N} = 1$ se tienen los siguientes operadores de casimir, primero definimos el vector B_μ y luego el tensor $C_{\mu\nu}$:

$$B_\mu = W_\mu - \frac{1}{4}\bar{Q}_{\dot{a}}(\sigma_\mu)^{\dot{a}b}Q_b \qquad C_{\mu\nu} = B_\mu P_\nu - B_\nu P_\mu \tag{31}$$

Entonces sus cuadrados definene los operadores de casimir, para una demostración vease [1]

$$P^2 = P_\sigma P^\sigma \qquad C^2 = C_{\mu\nu} C^{\mu\nu} \tag{32}$$

Superespacio

No es posible construir una teoria **SUSY** unicamente con el espacio de Minkowsky, ya que no explicaria el cambio de espin. por lo tanto es necesario introducir nuevas coordenadas que tengan en cuenta las cargas supersimetricas.

Variables de Grassman

Introduciendo las variables anticomuntantes:

$$\{\theta_A, \theta_B\} = \{\bar{\theta}_{\dot{A}}, \bar{\theta}_{\dot{B}}\} = \{\theta_A, \bar{\theta}_{\dot{B}}\} = 0 \tag{33}$$

$$\int d\theta_A = \int d\bar{\theta}_{\dot{A}} = \int d\theta_A \bar{\theta}_{\dot{A}} = 0 \qquad = \int d\bar{\theta}_{\dot{A}}\theta_A = 0 \tag{34}$$

Podemos expresar un campo en el superespacion o supercampo como una serie de taylor en las variables de Grassman tal como:

$$\Phi\left(x_\mu, \theta, \bar{\theta}\right) = \phi(x_\mu) + \theta\eta(x_\mu) + \bar{\theta}\chi^\dagger(x_\mu) + \bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\theta V_\mu(x_\mu) + \theta^2 F(x_\mu) + \bar{\theta}^2 \bar{F}(x_\mu) + \theta\theta\left(\theta_{\dot{A}}\bar{\lambda}^{\dot{A}}(x_\mu)\right) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta_A\psi^A(x_\mu) + \theta\theta\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)d(x_\mu) \tag{35}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Construcción de campos en el superespacio

Para poder construir campos apartir de representaciones irreducibles es necesario introducir las siguientes restricciones:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = D_{\alpha}\Phi^{\dagger} = 0 \tag{36}$$

Donde las derivadas D estan construidas de la siguiente forma:

$$D_a = \frac{\partial}{\partial\theta^a} - i\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_{\mu} \qquad \bar{D}_{\dot{a}} = -\frac{\partial}{\partial\theta^a} + i\sigma^{\mu}_{a\dot{a}}\bar{\theta}^{\dot{a}}\partial_{\mu} \tag{37}$$

Las anteriores restricciones identifican campos **quirales** y **antiquirales** respectivamente.
En general las funciones analiticas de campos quirales son buenas candidatas para crear lagrangianas invariantes ante transformaciones **SUSY**. si consideramos la transformación:

$$y^{\mu} = x^{\mu} + i\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\theta \qquad (y^{\mu})^{\dagger} = x^{\mu} - i\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}\theta \longrightarrow \bar{D}_{\dot{a}}\Phi(y^{\mu}) = 0 \tag{38}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Construcción de campos en el superespacio

De la anterior expansión y viendo que en general Φ puede ser un pseudoescalar de Lorentz, podemos deducir la naturaleza de los campos componentes del supercampo tal como, los campos $\phi, F, \psi, \bar{F}, d$ son campos escalares, mientras que los campos η, ψ son espinores izquierdos de Weyl, mientras $\bar{\chi}, \bar{\Lambda}$ son espinores derechos de Weyl. finalmente V_μ es un campo vectorial. Para construir un campo vectorial supersimetrico hay que imponer la condición:

$$V\left(x_\mu, \theta, \bar{\theta}\right) = V^\dagger\left(x_\mu, \theta, \bar{\theta}\right) \tag{39}$$

Haciendo de nuevo una expansion en las variables de Grassman obtenemos:

$$\begin{aligned} V\left(x_\mu, \theta, \bar{\theta}\right) = {} & C(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}M(x)\theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu(x) \\ & + \left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\theta\psi(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda} + (\theta\theta)\left(\bar{\theta}\bar{\theta}\right)d(x) \end{aligned} \tag{40}$$

Apartir de la ecuación (39) podemos inferir las caracteristicas de los campos componentes: (M,C,d) son campos escalares, (λ, ϕ) son campos espinoriales y V es un campo vectorial

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Construcción de Lagrangianos supersimetricos

Apartir de la expansion del supercampo scalar, podemos seleccionar las componentes quirales y apartir de ellas construir funciones de estos campos para plantear las acciones invariantes ante transformaciones **SUSY**:

$$S = \int d^4x \int d^4\theta \mathcal{L} \tag{41}$$

Ahora debemos imponer que al tener supercampos vectoriales estos tengan componentes **invariantes de Gauge**, primero escribimos el lagrangiano que contiene campos escalares, el mas general posible es:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \Phi_i^\dagger + \delta^2(\bar{\theta})\left(g_i\Phi_i + \frac{m_{ij}}{2}\Phi_i\Phi_j + \frac{\lambda_{ijk}}{3}\Phi_i\Phi_j\Phi_k\right) + \\ \delta^2(\theta)\left(g_i^*\Phi_i^\dagger + \frac{m_{ij}^*}{2}\Phi_i^\dagger\Phi_j^\dagger + \frac{\lambda_{ijk}^*}{3}\Phi_i^\dagger\Phi_j^\dagger\Phi_k^\dagger\right)\end{aligned} \tag{42}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Construcción de Lagrangianos supersimetricos

La forma de (42) esta con la restricción de la condición de **Renormalización**, para una discusion mas detallada de sto esta la referencia [1]. en resumen se trata de saber si los terminos de la lagrangiana tienen unidades de masa positivas.

Para las lagrangianas apartir de campos vectoriales la acción mas general posible está dada por:

$$S = \int d^4x \int d^4\theta \Big((W^A W_A)\delta^2(\bar{\theta}) + \Big(\bar{W}^{\dot{A}}\bar{W}_{\dot{A}}\Big)\delta^2(\theta)\Big) \tag{43}$$

Donde las **Field Strenght** para los supercampos están dadas por (en este caso una teoria abeliana):

$$W_A = -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})D_A V(x_\mu, \theta, \bar{\theta}) \tag{44}$$

$$\bar{W}_{\dot{A}} = -\frac{1}{4}(DD)\bar{D}_A V(x_\mu, \theta, \bar{\theta}) \tag{45}$$

para una extensión no abeliana se tiene:

$$W_A = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}(e^{-V}D_A e^{V}) \qquad \bar{W}_{\dot{A}} = -\frac{1}{4}DD(e^{-V}\bar{D}_A e^{V}) \tag{46}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Construcción de Lagrangianos supersimetricos

Y su correspondiente acción está dada por:

$$S = \int d^4x \int d^4\theta \left(\mathrm{Tr}\{(W^A W_A)\}\delta^2(\bar{\theta}) + \left(\mathrm{Tr}\left\{ \bar{W}^{\dot{A}} \bar{W}_{\dot{A}} \right\} \right) \delta^2(\theta) \right) \quad (47)$$

Referencias I

[1] Harald JW Muller-Kirsten e Armin Wiedemann. **Introduction to supersymmetry**. Vol. 80. World Scientific Publishing Company, 2010.

[2] Giovanni Costa e Gianluigi Fogli. **Symmetries and group theory in particle physics: An introduction to space-time and internal symmetries**. Vol. 823. Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Nima Arkani-Hamed, Tzu-Chen Huang e Yu-tin Huang. “Scattering amplitudes for all masses and spins”. Em: **Journal of High Energy Physics** 2021.11 (2021), pp. 1–77.

[4] S. Weinberg. **The Quantum Theory of Fields: Volume 3, Supersymmetry**. Quantum Theory of Fields. Cambridge University Press, 2005. ISBN: 9780521670555. URL: https://books.google.com.co/books?id=V1jzngEACAAJ.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

¡Gracias por la atención!

Contacto:

juacguzmanmar@unal.edu.co ,
remartinezm@unal.edu.co